Olympiadeklassen 9 – 10

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise:
1. *Die Aufgabe 591011 ist Pflichtaufgabe. Wähle von den Aufgaben 591012 und 591014 eine Aufgabe aus.*
2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*
3. *Schreibe auf* ***jedes Blatt*** *deinen* ***Vor- und Nachnamen*** *in* ***Druckschrift*** *sowie deine Klasse. Nutze für die Lösung der* ***2. Aufgabe*** *ein* ***neues Blatt****.*

591011

Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl.

In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m\cdot(x-5)+2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B.

Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.

b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck OAB in die Teildreiecke OPB und OAP.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.

d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl?
(Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (sodass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

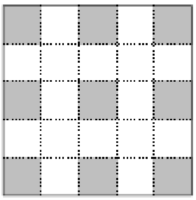
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591012

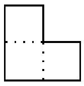
Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die n, $n+4$ und $n+8$ Primzahlen sind.

591014

In Abbildung A 591014 a ist ein Quadrat aus 25 Feldern gegeben. Diese Figur soll mit (zueinander kongruenten) L-Steinen ausgelegt werden, wobei ein spezielles Feld vorher entfernt wird. Ein L-Stein besteht aus drei in L-Form angeordneten quadratischen Feldern (siehe Abbildung A 591014 b).



A 591014 a



A 591014 b

a) Aus dem Quadrat wird eines der grauen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur mit 8 L-Steinen legen lässt.

b) Aus dem Quadrat wird eines der weißen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur nicht mit 8 L-Steinen legen lässt.