Olympiadeklassen 9–10

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise:

1. *Wähle von den Aufgaben 601011, 601013 und 601014 zwei Aufgaben aus.*
2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*
3. *Schreibe auf **jedes Blatt** deinen **Vor- und Nachnamen** in **Druckschrift** sowie deine Klasse. Nutze für die Lösung der **2. Aufgabe** ein **neues Blatt**.*

601011

a) Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke.
Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?

b) Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt x Ein-Euro-Münzen und y Zehn-Cent-Stücke.
Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?
Führen Sie zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finden Sie für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von x und y angibt.

Hinweis: Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezählt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

601013

a) Zeigen Sie: Sind a und b beliebige dreistellige natürliche Zahlen, so lassen die beiden sechsstelligen Zahlen $1000\,a + b$ und $1000\,b + a$ den gleichen Rest bei Division durch 37.

b) Die 3000-stellige Zahl $n = 9999\ldots99$ entsteht durch das Aneinanderreihen von 3000 Neunen.
Zeigen Sie: Die Zahl n ist durch 37 teilbar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601014

Wir betrachten in einer Ebene die vier verschiedenen Punkte A, B, C und D, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g liegen.

Zeigen Sie:

a) Wenn für jeden Punkt P auf g die Ungleichung

$$|AP| + |DP| \geq |BP| + |CP|$$

gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.

b) Wenn für jeden Punkt P der Ebene, der nicht auf g liegt, die Ungleichung

$$|AP| + |DP| > |BP| + |CP|$$

gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.

Hinweis: Mit $|AP|$ wird die Länge der Strecke $\overline{AP}$ bezeichnet.